08/04/2019

Παρασκευή 19 → 4-7
Τετάρτη 17/04 → 12-3 } αναπλήρωση

$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in R[x]$, $a_i, b_j \in R[x]$
$g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$

Τότε συμβολίζουμε $Res(f, g; x) =$ (n+m) τάξης ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & a_0 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & & b_m & 0 & & & 0 \\ 0 & & & & 0 & b_0 & & & b_m \end{vmatrix}$$

και καλείται απαλοίφουσα.

Θεώρημα

(α) Δύο πολυώνυμα f, g έχουν κοινό παράγοντα (μη σταθερό) αν και μόνο αν η απαλοίφουσα είναι μηδέν. $\Leftrightarrow Res(f, g; x) = 0$

(β) Το f έχει πολλαπλή ρίζα $\Leftrightarrow Res(f, f'; x) = 0$

καλείται διακρίνουσα ενός πολυωνύμου.

Εφαρμογή 1 – Quiz (έχει πέσει θέμα)

Έστω $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_2 \neq 0 \in \mathbb{R}[x]$.

$ax^2 + bx + \gamma$
$\Delta = b^2 - 4a\gamma$

Να δειχθεί ότι το f έχει διπλή ρίζα αν-ν $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$ $(\Leftrightarrow D = 0)$

Λύση

άρα, $f' = a_1 + 2a_2 x$

$Res(f, f'; x) = 0 \Leftrightarrow$

$2 + 1 = 3^{ης}$ τάξης ($2 \to f$, $1 \to f'$)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_0 \begin{vmatrix} 2a_2 & 0 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 4a_2^2 a_0 - a_1(2a_1a_2 - a_1a_2) = 0$

$\Rightarrow 4a_2^2 a_0 - a_1^2 a_2 = 0$

$\Rightarrow a_2(a_1^2 - 4a_0a_2) = 0$

υπόθεση $a_2 \neq 0$ $\boxed{\Delta = 0}$

2) Υπολογισμός Τομής Καμπυλών

Π.Χ. Δίνονται οι καμπύλες $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3x$, $g(x,y) = y^2 - 4x$
Να βρεθεί η τομή εάν υπάρχει.

Μεθοδολογία

[Αρχικά, θα υπολογίσουμε την
• $Res(f, g; x)$ → πολυώνυμο ως προς y (= 0 μας δίνει πιθανά κοινά σημεία τεταγμένων (y))
• $Res(f, g; y)$ → " ως προς x (—||— (x))

• Λαμβάνοντας όλα τα δυνατά ζεύγη έχουμε όλα τα πιθανά σημεία τομής.
• Κάνοντας επαλήθευση βρίσκουμε ποια από τα παραπάνω είναι σημεία τομής]

$$Res(f, g; x) = \begin{vmatrix} 0 & 3-2y & 1 \\ y^2 & -4 & 0 \\ 0 & y^2 & -4 \end{vmatrix} = -y^2 \begin{vmatrix} 3-2y & 1 \\ y^2 & -4 \end{vmatrix} = -y^2(-12+8y-y^2) =$$

$2+1=3^{ης}$ τάξης
↓ ↓
f g

$$= y^2(y^2-8y+12) = y^2(y-6)(y-2) \to y=0,\ y=6,\ y=2$$

$$Res(f, g; y) = \begin{vmatrix} x^2+3x & -2x & 0 \\ 0 & x^2+3x & -2x \\ -4x & 0 & y^2 \end{vmatrix} = \ldots = x^2(x^2-10x+9) = x^2(x-9)(x-1) \to x=0,\ x=9,\ x=1$$

Επομένως, πιθανά σημεία τομής είναι
((0,0), (0,6), (0,2), (9,0), (9,6), (9,2), (1,0), (1,6), (1,2))

Και τις 2 επαληθεύουν τα: (0,0), (1,2), (9,6)

Άρα, $V(f) \cap V(g) = \{(0,0), (1,2), (9,6)\}$

Εφαρμογή 3 : Εύρεση Καμπύλης αν γνωρίζουμε την παραμετροποίηση της.

Μεθοδολογία

$\{f(x,y)$ με $x(t)=\dfrac{p(t)}{q(t)}$, $y(t)=\dfrac{r(t)}{s(t)}$ $\left(\begin{array}{c} \text{μκδ}(p,q)=\text{μκδ}(r,s)=1 \\ \text{διαδ. κάνω απλοποίηση} \end{array}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$x(t)q(t)-p(t)=0 \qquad y(t)\cdot s(t)-r(t)=0$$

Θεωρώ τα πολ/μα $f=x(t)q(t)-p(t)$

$g=y(t)\cdot s(t)-r(t)$

και υπολογίζουμε την απαλείφουσα $\text{Res}(f,g;t)$

Ισχύει $(x_0,y_0)\in \mathcal{C}_f=\left\{x=\dfrac{p(t)}{q(t)},\ y=\dfrac{r(t)}{s(t)}\right\} \Leftrightarrow \text{Res}(f,g,t)=0$

Π.χ. Να βρεθεί η καμπύλη που προέρχεται από $\left\{x(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\ y(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}\right\}$

$x(t^2+1)=t^2-1 \Leftrightarrow 1+x+(x-1)t^2=0$

και

$y(t^2+1)=2t \Leftrightarrow y-2t+yt^2=0$

Θέτω $f^{(x,t)}=1+x+(x-1)t^2$ και $g^{(y,t)}=y-2t+yt^2$

Υπολογίζω την απαλείφουσα f και g ως προς t

$$\text{Res}(f,g;t)=\begin{vmatrix} 1+x & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 & x-1 \\ y & -2 & y & 0 \\ 0 & y & -2 & y \end{vmatrix}=\ldots=\ldots=4x^2+4y^2-4$$

$$=4(x^2+y^2-1)$$

$Res(f,g;t)=0 \Leftrightarrow 4(x^2+y^2-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2-1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2=1$: μοναδιαίος κύκλος.

Προβολικό Επίπεδο

Ορισμός

Το προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ είναι το σύνολο όλων των ~~...~~ ευθειών του $\mathbb{K}^3$ (κατεβ. μία διάσταση) που διέρχονται από ένα κοινό σημείο (αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$ το "μάτι").

Οι ευθείες αυτές καλούνται σημεία του προβολικού επιπέδου.

Συμβολίζονται: (x_1, x_2, x_3), όπου (x_1, x_2, x_3) τυχαίο σημείο της ευθείας $\neq (0,0,0)$ (το οποίο εξαιρείται)

Παρατηρήσεις

- Προφανώς $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_1 = ty_1,\ x_2 = ty_2,\ x_3 = ty_3,\ t \in \mathbb{K}$ (συμβολίζουμε $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$)
- Το $(0,0,0)$ εξαιρείται. Δεν το θεωρούμε σημείο ~~...~~ προβολικού επιπέδου.

π.χ. $(1,1,1) \sim (2,2,2) \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$(1,1,1) \sim (i,i,i) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

π.χ. $(0,0,0) \notin \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

(*) Στο προβολικό επίπεδο χάνεται η μοναδικότητα αναπαράστασης σημείων.

Ορισμός: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n+1})\} / \sim$ ← σχέση ισοδυναμίας

όπου "$\sim$": $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1}) \Leftrightarrow \exists\, t^* \in \mathbb{K}$: $x_1 = ty_1, \ \vdots\ , x_{n+1} = ty_{n+1}$